

B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, MARCH/APRIL 2021.

Third Year – Fifth Semester

Part II – Mathematics

Paper VI — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

1. If  $W_1$  and  $W_2$  are two subspaces of a vector space  $V(F)$  then prove that  $W_1 \cap W_2$  is also a subspace of  $V(F)$ .

సదిశాంతరాళం  $V(F)$ లో  $W_1$  మరియు  $W_2$ లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయిన  $W_1 \cap W_2$  కూడా మరలా  $V(F)$  ఉపాంతరాళం అగునని చూపండి.

2. If  $\alpha, \beta, \gamma$  are linearly independent vectors in  $V(R)$  then show that  $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$  are also linearly independent.

$V(R)$  లో  $\alpha, \beta, \gamma$  సదిశలు ఋజుపరాధీనాలు అయిన  $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ లు కూడా ఋజుపరాధీనాలు అని చూపండి.

3. State and prove Invariance theorem.

నిశ్చరత సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.

4. The mapping  $T : V_3(R) \rightarrow V_2(R)$  is defined by  $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ . Show that  $T$  is a linear transformation.

$T : V_3(R) \rightarrow V_2(R)$  ప్రమేయాన్ని  $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$  గా నిర్వచిస్తే  $T$  ఋజుపరివర్తనమని చూపండి.

5. Let  $U(F)$  and  $V(F)$  be two vector spaces and  $T : U \rightarrow V$  is a linear transformation. Then prove that  $R(T)$  is a subspace of  $V$ .

$U(F)$  మరియు  $V(F)$ లు రెండు సదిశాంతరాళములు మరియు  $T : U \rightarrow V$  ఋజుపరివర్తన అయితే  $V(F)$ లో  $R(T)$  ఉపాంతరాళము అని చూపుము.

6. Find the rank of the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ .

పై మాత్రికకు కోటిని కనుక్కోండి.

7. State and prove parallelogram law.  
సమాంతర చతుర్భుజాల నియమాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

8. Find a unit vector orthogonal to  $(4, 2, 3)$  in  $R^3$ .  
 $R^3$  అంతరాళంలో  $(4, 2, 3)$  సదిశకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుగొనండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

9. (a) Let  $V(F)$  be a vector space. A non empty set  $W \subseteq V$ . The necessary and sufficient condition for  $W$  to be a subspace of  $V$  is  $a, b \in F$  and  $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ .  
 $V(F)$  ఒక సదిశాంతరాళము, శూన్యేతర సమితి  $W \subseteq V$ .  $V$  లో  $W$  ఒక ఉపాంతరాళం కావడానికి అవశ్యక పర్యాప్తక నియమం  $a, b \in F; \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ .

Or

(b) If  $S$  is a subset of a vector space  $V(F)$  then prove that  $S$  is a subspace of  $V \Leftrightarrow L(S) = S$ .  
సదిశాంతరాళం  $V(F)$  నకు  $S$  ఉప సమితి అయితే  $S$  కు ఒక ఉపాంతరాళము  $V \Leftrightarrow L(S) = S$  అని చూపుము.

10. (a) Let  $W$  be a subspace of a finite dimensional vector space  $V(F)$  then prove that  $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$ .  
 $V(F)$  పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళానికి  $W$  ఉపాంతరాళము అయితే  $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$  అని చూపుము.

Or

(b) If  $W_1$  and  $W_2$  are the subspaces of  $V_4(R)$  defined by  $W_1 = \{ (a, b, c, d) : b - 2c + d = 0 \}$ ,  $W_2 = \{ (a, b, c, d) : a = d, b = 2c \}$ . Compute  $\dim W_1$ ,  $\dim W_2$ ,  $\dim(W_1 \cap W_2)$  and  $\dim(W_1 + W_2)$ .  
 $V_4(R)$  లో  $W_1$  మరియు  $W_2$  ఉపాంతరాళాలు  $W_1 = \{ (a, b, c, d) : b - 2c + d = 0 \}$ ,  $W_2 = \{ (a, b, c, d) : a = d, b = 2c \}$  గా నిర్వచించబడితే  $\dim W_1$ ,  $\dim W_2$ ,  $\dim(W_1 \cap W_2)$  మరియు  $\dim(W_1 + W_2)$  లు కనుగొనండి.

11. (a) State and prove Rank nullity theorem.  
కోటి-శూన్యతా సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Describe explicitly the linear transformation  $T : R^2 \rightarrow R^2$  such that  $T(2, 3) = (4, 5)$  and  $T(1, 0) = (0, 0)$ .  
 $T : R^2 \rightarrow R^2$  లో  $T(2, 3) = (4, 5)$  మరియు  $T(1, 0) = (0, 0)$  ఋజుపరివర్తన అయిన  $T(x, y, z)$  ను కనుక్కోండి.

12. (a) State and prove Cayley-Hamilton theorem.  
కెయిలీ-హామిల్టన్ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

- (b) Find the characteristic roots and the corresponding characteristic vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ మాత్రకకు లాక్షణిక విలువలు మరియు వాటికి అనురూపమైన లాక్షణిక సదిశలను కనుగొనుము.}$$

13. (a) If  $\alpha, \beta$  are two vectors in an inner product space  $V(F)$  then prove that  $|\langle \alpha, \beta \rangle| = \|\alpha\| \|\beta\|$  if and only if  $\alpha$  and  $\beta$  are linearly dependent.  
 $V(F)$  అనే ఒక అంతర లబ్ధాంతరాళంలో  $\alpha, \beta$  లు రెండు సదిశలు అయిన  $|\langle \alpha, \beta \rangle| = \|\alpha\| \|\beta\|$   $\alpha$  మరియు  $\beta$  లు రేఖీయ అశ్రితాలు అని చూపండి.

Or

- (b) State and prove Bessel's in equality.  
బెసెల్స్ అసమానతను ప్రవచించి నిరూపించుము.